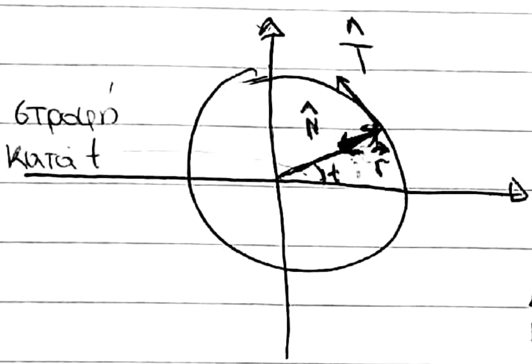
19/03/2018.

Μάθημα 7ο

Παράδειγμα   Κίνηση σε πολικές Συντεταγμένες.

$\vec{r}(t) = r\cos t\,\hat{i} + r\sin t\,\hat{j}$



$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -r\sin t\,\hat{i} + r\cos t\,\hat{j}$$

$$\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{dt} \cdot \frac{1}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|} = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j} = -\hat{r}$$

κάθετο στο $\hat{T}$ καθετότητα   για να είναι μοναδιαίο

$$\dot{\hat{T}} = \frac{d\hat{T}}{dt} = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j}$$

$$\left.\begin{aligned} -\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} &= \hat{\theta} \\ \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} &= \hat{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix}$$

μοναδιαία
διανύσματα σε κυκλική κίνηση
↳ διαφέρω γωνίες

$$\begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix}$$

Μπορώ δηλ. να πάω από το ένα συστ. συν. στο άλλο χωρίς πρόβλημα.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -r\sin t\,\hat{i} + r\cos t\,\hat{j} = r(-\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j}) = r\hat{\theta}$$

↳ κατεύθυνση → ταιριάζει με το ακτινικό

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-\dot{r}\sin t - r\cos t)\hat{i} + (\dot{r}\cos t - r\sin t)\hat{j} =$$

$$= \dot{r}(-\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j}) + r(-\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j}) =$$

$$= \dot{r}\hat{\theta} - r\hat{r}$$

Δηλ.

$$\boxed{\begin{cases} \vec{v} = r\hat{\theta} \\ \vec{a} = \dot{r}\hat{\theta} - r\hat{r} \end{cases}}$$

Τα έγραψα συναρτήσει των μοναδιαίων.

Κατάφερα απλοποίηση.

$\vec{v} = r\hat{\theta}$ $\xrightarrow{\text{δηλ.}}$ η μόνη κίνηση που θα δω είναι η εφαπτομενική στη τροχιά σου

$\vec{a}$ → θα δω μια επιτάχυνση σε έναν άξονα χωρίς κίνηση.

$\vec{a} = \underbrace{\dot{r}\hat{\theta}}_{\text{επιτρόχιος}} - r\hat{r}$ → κεντρομόλος → είναι αυτό που με κρατάει πάνω στη τροχιά

Επιταχύνομαι στους άξονες της κίνησης με συγκεκρ. τρόπο

Άσκηση - Παράδειγμα

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο με σταθερά μέτρα ταχύτητας και επιτάχυνσης. Να βρεθεί η τροχιά του.

Λύση

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ τροχιά → κινούμαι στο επίπεδο

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \\ \vec{a}(t) &= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \tilde{c}_1 \\ \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \tilde{c}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= c_1 \\ \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 &= c_2 \end{aligned}} \end{cases}$$ συστ. διαφ. εξ.

Για διαφορικές εξισώσεις

1ον → τάξη
2ον → γραμμικές ή μη γραμμικές

γραμμικές ⇓ κοιτάω συντελεστές ⇓ σταθεροί ή όχι ⇓ Χ.Π. / μορφές

μη γραμμικές ⇓ π.χ. Ricatti — συνήθως πρέπει να γνωρίζω μια μερική λύση

Εγώ προσπαθώ να έχω ίδια τάξη στις 2 εξισώσεις μας

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c_1 \\ \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} = 0 \\ \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \\ \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = c_2 \end{cases}$$

Μη ξεχνάω και το ανάποδο.
Αν ολοκληρώσω το $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0$ παίρνω το $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c_1$

Θέλω να γράψω το σύστημα ως προς μια μεταβλητή

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\ddot{y} \\ \left(-\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\ddot{y}\right)^2 + \ddot{y}^2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{y}^2\ddot{y}^2}{\underbrace{c_1 - \dot{y}^2}_{=\dot{x}^2}} + \ddot{y}^2 = c_2} \quad (\mathrm{I})$$

Το σύστημα είναι 2ου βαθμού
για να απεμπλέξω διαφορικό σύστημα πρέπει (εδώ):
2 → η τάξη του συστήματος
2 − 1 = 1 (διαφορά των τάξεων)
Θα πρέπει να βγάλω 3ου βαθμού

Εδώ όμως έχουμε βγάλει 2ου βαθμού τάξης στην παράγωγο.
⇓
Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να παραγωγίσω ...

(Σ) ⇒ . . . → αυτό που προκύπτει το ζητούμενο

Αξιωματική θεμελίωση της Μηχανικής
Όπως αξιωματικά θεμελιώσαμε τους πραγματικούς
έτσι θα θεμελιώσουμε αξιωματικά και την Μηχανική

Τα αξιώματα του Νεύτωνα για την κίνηση των σωμάτων
είναι απολύτως αποδεκτά και επαληθεύσιμα από πειράματα
(Ο νόμος - κανόνας - τύπος που δίνεται έχει προγνωστικές
ιδιότητες)
(Έχει και παρελθοντικές ιδιότητες)

1ο αξίωμα - Ο Νόμος της Αδράνειας.
Ένα σώμα παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή σε ευθύγραμμης
και ισοταχούς κίνησης εκτός αν επιδρά πάνω του
μια δύναμη.
Για να ποσοτικοποιήσουμε το αξίωμα ορίζουμε την έννοια της ορμής.

$\vec{p} = m\vec{v}$, m: μάζα αντικειμένου
$\vec{v}$: η ταχύτητά του.

Φυσική σημασία της ορμής
Αν η ταχύτητα είναι σταθερή τότε και η ορμή είναι σταθερή που σημαίνει ότι το αντικείμενο (το ελεύθερο) δε μπορεί από μόνο του να μεταβάλει την κινητική του κατάσταση

2ο αξίωμα: Ο Νόμος της επιτάχυνσης
Η μεταβολή της ποσότητος κίνησης, δηλ της ορμής ενός υλικού σημείου είναι ανάλογη της δύναμης που επιδρά σε αυτό και γίνεται κατά τη διεύθυνση της δύναμης.

Δηλ: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})$

Αν η μάζα είναι σταθερή : $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$

π.χ. ένας πύραυλος καταναλώνει καύσιμο.
Αυτό σημαίνει ότι η μάζα του μειώνεται (μεταβάλλεται)

Φυσική Σημασία:
Το αξίωμα εισάγει τις έννοιες της μάζας και της δύναμης και ότι η σχέση τους καθορίζει την κίνηση του σώματος

$r(0) = r_0$
$\dot{r}(0) = v(0) = v_0$

Αν η μάζα είναι σταθερή τότε $\boxed{\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$

που αντιστοιχεί σε μια διαφορική εξίσωση που καθορίζει τη τροχιά του σώματος αν ξέρουμε την αρχική δύναμη F, την ταχύτητα (αρχική) και την αρχική του θέση.

ντετερμινιστικός κανόνας → ξέρω ανά πάσα ώρα και στιγμή που είμαι και τι έχω

και όλα αυτά από μία εξίσωση $2^{ης}$ τάξης (διαφορική)

Αρχή του Καθορισμού
Στο πλαίσιο της κλασικής Μηχανικής η (χρονική) εξέλιξη ενός συστήματος είναι μονοσήμαντα καθορισμένη από την αρχική του κατάσταση (θέση-ταχύτητα) και το $2^{ο}$ αξίωμα του Νεύτωνα

πρόβλημα αρχικών τιμών : $\boxed{\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ \dot{r}(0) &= v(0) = v_0 \end{aligned}}$

Από αυτό μπορώ να εξάγω τα πάντα! (Αρχή ΔΑΔ)

$3^{ο}$ αξίωμα: Νόμος Δράσης - Αντίδρασης
Οι δυνάμεις τις οποίες ασκούν δύο υλικά σημεία το ένα στο άλλο είναι ίσες κατά μέτρο και αντίθετες σε φορά και ενεργούν στην ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά.

Αν $\vec{F}_{12}$ η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2
και $\vec{F}_{21}$ η δύναμη που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1.
τότε $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Φυσική Ερμηνεία
Οι δυνάμεις στη φύση εκδηλώνονται σε ζεύγη.
Μεμονωμένη δύναμη δεν υπάρχει
(π.χ. τραβάω η γη έλκει εμένα κι εγώ έλκω τη γη)

Ο,τιδήποτε προσπαθήσω να κάνω θα έχει μια άμεση αντίδραση.

Οι έννοιες του Χώρου και του Χρόνου.

① Ο χώρος: θεωρείται συνεχής ομογενής και ισότροπος.
Τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ανεξάρτητα των χωρικών συντεταγμένων και του προσανατολισμού του.

Οι μαύρες τρύπες → ασυνέχεια στο χρονοχωρικό συνεχές
συνεχής → δεν έχει τρύπες.

② Ο Χρονος είναι ομογενής
ΔΗΛ τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ίδια για διαφορετικές χρονικές στιγμές εκτέλεσης του πειράματος

Τα Είδη των Δυνάμεων
Οι δυνάμεις στη φύση είναι τέσσερις.

- Βαρυτικές
  Ηλεκτρομαγνητικές
  Ισχυρές πυρηνικές
  Ασθενείς πυρηνικές

Μονάδα. $1\,Nt = 1\,Newton = 1\,kgr \cdot 1\,\frac{m}{sec^2}$

ΔΗΛ είναι η δύναμη που δίνει σε μάζα ενός kg επιτάχυνση. $1\,kgr\,\frac{m}{sec^2}$

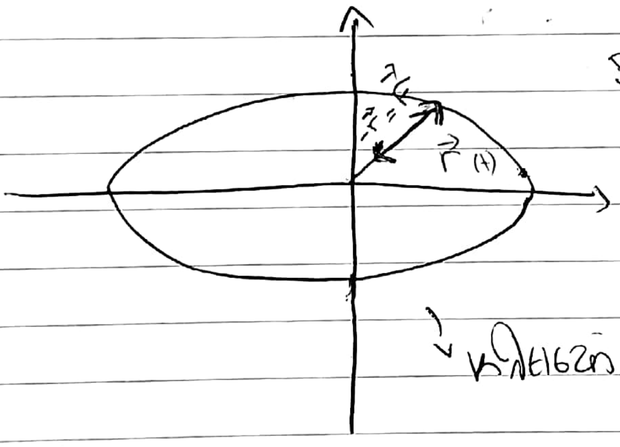
Παράδειγμα

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τροχιά
$\vec{r}(t) = (a\cos(\omega t))\hat{i} + (b\sin(\omega t))\hat{j}$ $a > b > 0$, $\omega > 0$

Να δείξετε ότι το σωματίδιο κινείται σε έλλειψη και ότι η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο έχει πάντα κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων.

Λύση

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t) \\ y = b\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos(\omega t) \\ y/b = \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



σας Αν κινείσαι σε έλλειψη θα έχεις αναγκαστικά μία δύναμη να σε τραβάει στο κέντρο (φορά προς το κέντρο)

κλειστή τροχιά

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin(\omega t)\hat{i} + b\omega\cos(\omega t)\hat{j}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -a\omega^2\cos(\omega t)\hat{i} - b\omega^2\sin(\omega t)\hat{j} = -\omega^2\left[a\cos(\omega t)\hat{i} + b\sin(\omega t)\hat{j}\right] = -\omega^2\vec{r}$$

Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης

Ο Βασικός Νόμος που καθορίζει τις βαρυτικές δυνάμεις είναι ο νόμος της παγκόσμιας Έλξης, όλα 2 υλικά σημεία έλκονται μεταξύ τους με δύναμη ανάλογη των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης.
Η Δύναμη ενεργεί στην ευθεία που ενώνει τα 2 σημεία.

ΜΔΣ: $\vec{F} = -G \dfrac{M_1 M_2}{r^2} \hat{r}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \dfrac{Nt\, m^2}{kg\, r^2}$

Αν αντικαταστήσαμε με το βάρος μας και το βάρος της γης

$\vec{B} = -G \dfrac{M_\Gamma m}{R_\Gamma^2} \hat{r}$, $\boxed{g = G \dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}}$

$\Rightarrow \vec{B} = -g m \hat{r}$

Η δύναμη που ασκεί κάποιος (χωρικής) πάνω μας (ψοιτητές)
Είναι πολλαπλάσια της δύναμης που ασκεί όλο το ηλιακό σύστημα πάνω μας